به نام خدا



تمرین‌های اختیاری با * مشخص شده‌اند.

* ۱-۴ همه توپ‌ها را روی یک خط می‌چینیم. از بین آنها ۲ توپ را انتخاب می‌کنیم که سفید باشند. چون تعداد $\binom{n}{2}$ انتخاب داریم، تعداد ترتیب‌های خطی در نظر $\binom{n}{2}$ خواهد بود

۱-۵ این تعداد برابر است با تعداد بردارهایی که در شرط $\sum x_i = k$ صدق می‌کنند، به علاوه تعداد بردارهایی که در شرط $\sum x_i = k+1$ صدق می‌کنند و ...، به علاوه تعداد بردارهایی که در شرط $\sum x_i = n$ صدق می‌کنند. پس جواب برابر است با

$$\sum_{l=k}^{n}\binom{n}{l}$$

۱-۶ بردار $k$ عضوی $(y_1, y_2, \dots, y_k)$ را با $y_1 = x_1 - 1$ و $y_m = x_m - x_{m-1} - 1$ برای $2 \le m \le k$ تعریف می‌کنیم. چون $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ مقادیر $y_m$ نامنفی هستند و به علاوه

$$\sum_{m=1}^{k} y_m = \sum (x_m - x_{m-1} - 1) = x_k - k$$

که $x_k$ می‌تواند مقادیر $k$ تا $n$ را بپذیرد. همانطور که در کلاس درس دیدیم اگر $\sum_{m=1}^{k} y_m = l$ باشد تعداد حالت‌های بردار $y$ ها برابر است با $\binom{l+k-1}{k-1}$
پس تعداد کل حالت‌های بردار $x$ ها برابر است با

$$\sum_{l=0}^{n-k}\binom{l+k-1}{k-1}$$

۱-۸ گروهی متشکل از $n$ مرد و $m$ زن را در نظر بگیرید. تعداد حالتهای انتخاب $r$ نفر از این گروه عبارت است از جمع تعداد حالتهای انتخاب $k$ مرد ضرب در تعداد حالت‌های انتخاب $r-k$ زن برای $k$ از صفر تا $r$ بنابراین

$$\binom{n+m}{r} = \sum_{k=0}^{r}\binom{n}{k}\binom{m}{r-k}$$

* ۱-۹ با فرض $n = m$ این رابطه به سادگی از رابطه فوق نتیجه می‌شود

* ۱-۱۰ الف) تعداد حالتهای انتخاب شورای $k$ نفری از بین $n$ نفر $\binom{n}{k}$ می‌باشد. تعداد حالتهای انتخاب یک رئیس بین $k$ نفر عضو شورا $k$ است. بنابراین جواب $k\binom{n}{k}$ می‌باشد

ب) تعداد حالتهای انتخاب شورای بدون رئیس $k-1$ نفری از $n$ نفر $\binom{n}{k-1}$ است. تعداد حالات انتخاب یک رئیس از $n-k+1$ نفر باقی مانده $n-k+1$ است پس تعداد حالات

ممکن برابر است با: $\binom{n}{k-1}(n-k+1)$

ج) تعداد حالات انتخاب رئیس شورا را n است. تعداد حالات انتخاب k-1 عضو غیر رئیس شورا از بین n-1 نفر باقیمانده $\binom{n-1}{k-1}$ است. بنابراین جواب $n\binom{n-1}{k-1}$ است.

د) این نتیجه با توجه به اینکه تعداد حالات انتخاب در هر سه حالت یکی است بدیهی می‌باشد.

ه)
$$k\times\binom{n}{k} = k\,\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} \quad (A)$$

$$(n-k+1)\binom{n}{k-1} = (n-k+1)\,\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} \quad (B)$$

$$n\binom{n-1}{k-1} = n\,\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-k+1)!} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} \quad (C)$$

$$\boxed{A=B=C}$$

۱-۱۱) فرض کنید k عدد از مجموعه اعداد ۱ تا n را می‌خواهیم انتخاب کنیم. این اعداد متمایز هستند. اگر بزرگترین عدد بین اعداد انتخاب شده را i فرض کنیم بقیه اعداد می‌توانند مقادیر ۱ تا i-1 را داشته باشند و تعداد حالات برابر است با $\binom{i-1}{k-1}$. تعداد کل حالات انتخاب با جمع تعداد حالات برای مقادیر ممکن i بدست می‌آید. چون کمترین مقداری که i می‌تواند داشته باشد k و بیشترین مقدار n است داریم:

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=k}^{n}\binom{i-1}{k-1}$$

۱-۱۲) الف) همانطور که در تمرین ۱-۱۰ الف دیدیم تعداد حالتهای انتخاب یک شورای k نفره با یک رئیس برابر است با $k\binom{n}{k}$. بنابراین کل حالتهای انتخاب یک شورا با تعداد اعضای دلخواه با یک رئیس از یک مجموعه n نفره برابر است با $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$.

از طرف دیگر می‌توان این مقدار را به صورت زیر بدست آورد. کل n نفر را در نظر می‌گیریم. نخست رئیس شورا را انتخاب می‌کنیم که n حالت ممکن برای آن وجود دارد. سایر اعضای مجموعه که n-1 نفر هستند هر یک دو حالت عضویت یا عدم عضویت دارند که تعداد حالات عضویت آنها برابر است با $2^{n-1}$ حالت. بنابراین تعداد کل حالات ممکن با این روش برابر است با $n\times 2^{n-1}$.

بنابراین داریم:

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n\times 2^{n-1}$$

۱-۱۲ ب) تعداد حالات انتخاب یک شورای k نفره با یک رئیس و یک منشی که می‌توانند همان رئیس باشد برابر است با $\binom{n}{k}k^2$ [ $\binom{n}{k}$ انتخاب برای اعضای شورا، k انتخاب برای رئیس و مجدداً k انتخاب برای منشی ] پس تعداد حالات انتخاب یک شورا با تعداد اعضای دلخواه از بین n نفر با یک رئیس و یک منشی که می‌توانند همان رئیس باشد برابر است با $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^2$

از طرف دیگر تعداد حالات انتخاب یک شورای n نفره با یک رئیس و یک منشی را می‌توان از جمع تعداد حالات انتخاب این شورا با رئیس و منشی یکسان و تعداد حالات انتخاب این شورا با رئیس و منشی متفاوت بدست آورد.

تعداد حالات انتخاب یک شورا از بین n نفر با رئیس و منشی یکسان برابر است با تعداد حالات انتخاب رئیس (یا منشی) که n است ضرب در تعداد حالات عضویت بقیه اعضاء در شورا که $2^{n-1}$ است پس مجموعاً $n\times 2^{n-1}$ شورا از بین n نفر با رئیس و منشی یکسان داریم.

تعداد حالات انتخاب یک شورا از بین n نفر با رئیس و منشی متفاوت برابر است با تعداد حالات انتخاب رئیس از بین n نفر ضرب در تعداد حالات انتخاب منشی از بین n-1 نفر باقی‌مانده ضرب در تعداد حالات عضویت بقیه اعضاء در شورا که $2^{n-2}$ است پس مجموعاً $n(n-1)2^{n-2}$ شورا از بین n نفر با رئیس و منشی متفاوت داریم.

جمع دو مجموعه حالات فوق برابر است با: $n2^{n-1}+n(n-1)2^{n-2}=2^{n-2}n(n+1)$

بنابراین در نهایت داریم:

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^2=2^{n-2}n(n+1)$$

* ۱-۱۲ ج) این رابطه را هم می‌توان به طریق مشابه با محاسبه تعداد حالات انتخاب یک شورا از بین n نفر با یک رئیس و یک منشی اول و یک منشی دوم بدست آورد.

۱-۱۳) $0=(-1+1)^n=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\,1^{n-i}\binom{n}{i}=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}$

۱-۱۵) صورت این سوال دارای اشتباه تایپی است صورت صحیح سوال به صورت زیر است:
اگر $H_k(n)$ تعداد بردارهای $(x_1,\dots,x_k)$ باشد که $x_i$ ها مقادیر صحیح مثبت که در شرایط $1\le x_i\le n$ و $x_1\le x_2\le\dots\le x_k$ صدق کنند.

جواب الف) اگر $k=1$ باشد یک عدد داریم با شرط $1\le x_1\le n$ بنابراین واضح است که $H_1(n)=n$
برای k بزرگتر از یک فرض کنید $x_k=j\ (\le n)$ باشد. تعداد حالات انتخاب $x_1$ تا $x_{k-1}$ برابر با $H_{k-1}(j)$ خواهد بود زیرا تمام آنها باید به جای n از j کوچکتر باشند. چون $x_i$ ها می‌توانند مقادیر ۱ تا n را

$$H_k(n) = \sum_{j=1}^{n} H_{k-1}(j)$$ بنابراین داریم.

— حل قسمت ب در پایین صفحه

۱-۱۸) یک مجموعه $n$ عضوی در نظر بگیرید. سمت چپ معادله برابر است با تعداد حالات انتخاب $n_1$ عضو در زیرمجموعهٔ اول، $n_2$ عضو در زیرمجموعهٔ دوم، ...، تا $n_k$ عضو در زیرمجموعهٔ $k$ ام.
حال یک عضو دلخواه (مثلاً عضو اول) را در نظر بگیرید و فرض کنید این عضو در مجموعهٔ $i$ ام ($1 \le i \le k$) قرار گرفته است. سمت راست معادله جمع تعداد حالات انتخاب اعضای بقیه زیرمجموعه‌ها و $n_i - 1$ عضو باقیمانده زیرمجموعه $i$ ام از $n-1$ عضو باقیمانده برای $i=1$ تا $k$ است.
(جزئیات بر عهده دانشجویان)

۱-۲۲) مشتق جزئی مرتبه $r$ ام
$$\frac{\partial^r f(x_1,\dots,x_n)}{\partial^{r_1}x_1\, \partial^{r_2}x_2 \cdots \partial^{r_n}x_n}$$
را در نظر بگیرید.
واضح است که $\sum_{k=1}^{n} r_k = r$ و $0 \le r_k \le r$. بنابراین مطابق مباحث درس تعداد مشتقات جزئی مرتبه $r$ ام $f(\cdot)$ برابر است با: $\binom{r+n-1}{n-1}$

۱-۲۳) تعداد بردارها با شرط $\sum_{i=1}^{n} x_i \le k$ برابر است با تعداد بردارها با شرط $\sum_{i=1}^{n} x_i = m$ برای $m$ از صفر تا $k$. بنابراین تعداد کل حالات برابر است با:

$$\sum_{m=0}^{k} \binom{m+n-1}{n-1}$$

* ۱-۱۵ ب)

$$H_2(1) = H_1(1) = 1$$
$$H_2(2) = H_1(1) + H_1(2) = 1 + 2 = 3$$
$$H_2(3) = H_1(1) + H_1(2) + H_1(3) = 1+2+3 = 6$$
$$H_2(4) = H_1(1) + H_1(2) + H_1(3) + H_1(4) = 1+2+3+4 = 10$$
$$H_2(5) = \cdots = 15$$
$$H_3(5) = H_2(1) + H_2(2) + H_2(3) + H_2(4) + H_2(5)$$
$$= 1 + 3 + 6 + 10 + 15$$
$$= 35$$